d) $U_n^2 \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\pi}{2n^3(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}$ d'où $n^3 U_n^2$

$= \dfrac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})} \cdot \dfrac{1}{\frac{U_{n+1}}{U_n}}$

$n\sqrt{n}\, U_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})} \cdot \dfrac{1}{\frac{U_{n+1}}{U_n}}}$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\, U_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

Solution 10 :

1°/ $U_0 = \int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$

2°/ $\forall x \in [0,1]$ on a : $\dfrac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$ d'où $U_n \geq 0$

3°/ a) $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \dfrac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}}dx - \int_0^1 \dfrac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \dfrac{x^{2n+1}(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} \leq 0$

D'où (U_n) est une suite décroissante .

b) On a : $\begin{cases} U_n \geq 0 \\ (U_n) \text{ est une suite décroissante} \end{cases}$

D'où (U_n) est convergente

4°/ $x \in [0,1]$

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2+1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} x^{2n+1} \leq \dfrac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^{2n+1}$

D'où : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^{2n+1}dx \leq U_n \leq \int_0^1 x^{2n+1}dx$